Άρβηλος και κύκλοι του Αρχιμήδη

Συμμετέχοντες μαθητές από το 2ο ΓΕΛ Μεσολογγίου: Γεωργακόπουλος Δημήτριος, Ζίου Ανδρέας, Κουτσομήτρος Νικηφόρος-Νεκτάριος, Σπυρόπουλος Βασίλειος, Στρατογιάννης Γεώργιος -Χρήστος. Από το 6ο ΓΕΛ Αγρινίου: Μουρούκος Παναγιώτης, Συγγούνα Παρασκευή

Υπεύθυνοι Εκπαιδευτικοί: Θεοδωράκης Δημήτριος ΠΕ03, (mail:dtheodorakis@sch.gr) , Στίγκας Σπύρος ΠΕ03(mail: sstigkas@sch.gr)

Σχολεία: 2ο ΓΕ.Λ. Μεσολογγίου – 6ο ΓΕ.Λ. Αγρινίου

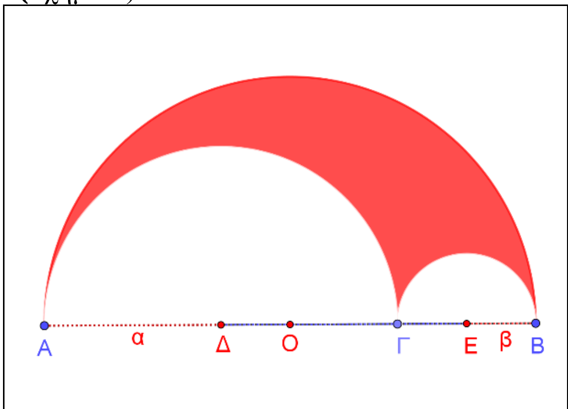
ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο Αρχιμήδης θεωρείται ότι είναι ο σπουδαιότερος από τους μαθηματικούς της αρχαιότητας και ένας από τους σπουδαιότερους όλων των εποχών.. Γεννήθηκε: 287 π.Χ στις Συρακούσες. Απεβίωσε: 212 π.Χ . Η συνεισφορά του στη γεωμετρία έφερε επανάσταση και οι μέθοδοί του προετοίμασαν το έδαφος για τον ολοκληρωτικό λογισμό Χρησιμοποίησε τη μέθοδο της εξάντλησης, για τον υπολογισμό της περιοχής, κάτω από το τόξο παραβολής και έδωσε μια εξαιρετικά ακριβή προσέγγιση για τον αριθμό π.

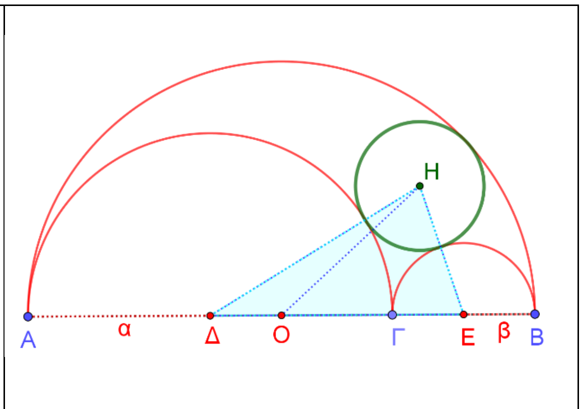
Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με την Άρβηλο και τους κύκλους του Αρχιμήδη (Ευάγγελος Σταμάτης , 1970 & Γεώργιος Δ. Μιστριώτης, 2023). Θα προσπαθήσουμε να εντοπίσουμε και να αποδείξουμε κάποιες από τις ιδιότητες που έχουν , χρησιμοποιώντας θεωρήματα Γεωμετρίας όπως τα διδάσκονται μαθητές της Β τάξης Γενικού Λυκείου. Οι αποδείξεις και τα σχήματα- που δημιουργήθηκαν με το λογισμικό geogebra- έγιναν αποκλειστικά από τους μαθητές κατόπιν υποδείξεων των εκπαιδευτικών.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *Κύκλος , Εφαπτομένη , Μετρικές σχέσεις , Κωνικές τομές, Ήρωνας*

Ορισμός: Έστω ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ=2(α+β) και κέντρου Ο και Γ τυχαίο σημείο της ΑΒ. Γράφουμε εντός αυτού ημικύκλια με διαμέτρους ΑΓ=2α (με κέντρο Δ) και ΓΒ=2β (με κέντρο Ε). Το σχήμα που περιέχεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων ονομάζεται **άρβηλος .** (σχήμα 1)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

ΠΡΟΤΑΣΗ 1η.

Η ακτίνα **ρ** του εφαπτόμενου κύκλου των τριών ημικυκλίων της αρβήλου είναι ίση με $\frac{\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha+\beta)}{\alpha^2+\beta^2+\alpha\cdot\beta}$. (σχήμα 2)

Αν (Η, ρ) ο εφαπτόμενος κύκλος, τότε καθώς οι κύκλοι (Δ, α), (Ε, β) και (Η, ρ) εφάπτονται εσωτερικά του (Ο, α+β) οι διάκεντροι (Αργυρόπουλος Ηλίας κ.α. , 2022-τεύχος Α) τους θα είναι: ΟΔ = (α+ β)-α = β, ΟΕ = (α+ β)-β = α και ΟΗ = α+ β -ρ αντίστοιχα, ενώ ο κύκλος (Η,ρ) ως εφαπτόμενος εξωτερικά με τους κύκλους (Δ, α) και (Ε, β) θα έχει διάκεντρο

ΔΗ=α + ρ, και ΕΗ=β + ρ. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Stewart (Αργυρόπουλος Ηλίας κ.α. , 2022-τεύχος Β) στο $\overset{\triangle}{\Delta H E}$ έχουμε: $\Delta H^2 \cdot OE + EH^2 \cdot O\Delta = \Delta E \cdot (OH^2 + OE \cdot O\Delta) \Leftrightarrow$ $(\alpha+\rho)^2 \cdot \alpha + (\beta+\rho)^2 \cdot \beta = (\alpha+\beta) \cdot ((\alpha+\beta-\rho)^2 + \alpha \cdot \beta) \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow \rho = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot (\alpha+\beta)}{\alpha^2+\beta^2+\alpha \cdot \beta}$.
Άρα η ακτίνα του κύκλου (Η, ρ) είναι γνωστή και μπορεί να κατασκευαστεί.

<u>Γεωμετρική κατασκευή ακτίνας ρ του εφαπτόμενου κύκλου.</u>

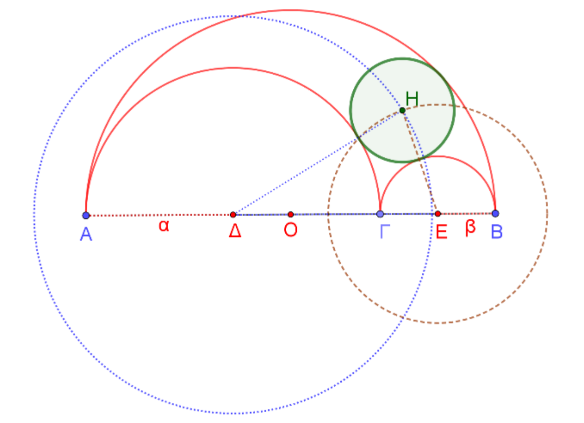
Κατασκευάζουμε τμήματα:
κ ώστε κ=α+β, (άθροισμα τμημάτων),
λ ώστε λ^2=αβ (μέση ανάλογος),
μ ώστε $\mu^2=\alpha^2+\beta^2$ (υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές α και β)
ν ώστε $\nu^2=\mu^2+\lambda^2$ (υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές μ και λ).
ψ ώστε $\psi = \frac{\lambda \cdot \kappa}{\nu}$ (4^{η} ανάλογος).

Τότε η ακτίνα γράφεται $\rho = \frac{\lambda^2 \cdot \kappa}{\mu^2+\mu^2} = \frac{\lambda^2 \cdot \kappa}{\nu^2} = \frac{\lambda \cdot \kappa}{\nu} \cdot \frac{\lambda}{\nu} = \frac{\psi \cdot \lambda}{\nu}$, ($4^{\eta}$ ανάλογος)

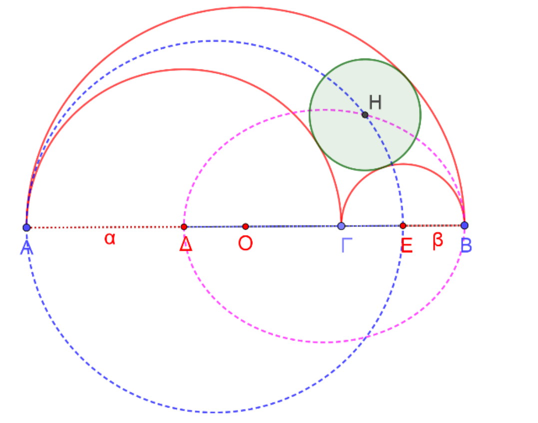
<u>Εύρεση κέντρου του εφαπτόμενου κύκλου.</u>

<u>$1^{ος}$ τρόπος.</u> (Σχήμα 3)

Επειδή $\Delta H = \alpha + \frac{\alpha \cdot \beta \cdot (\alpha+\beta)}{\alpha^2+\beta^2+\alpha \cdot \beta}$ και $EH = \beta + \frac{\alpha \cdot \beta \cdot (\alpha+\beta)}{\alpha^2+\beta^2+\alpha \cdot \beta}$ το κέντρο Η του εφαπτόμενου κύκλου απέχει σταθερή απόσταση από τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Επομένως θα είναι το σημείο τομής των κύκλων (Δ, ΔΗ) και (Ε, ΕΗ) το εντός της αρβήλου.



<u>Σχήμα 3</u>



<u>Σχήμα 4</u>

<u>$2^{ος}$ τρόπος.</u> (Σχήμα 4)

Επειδή ΗΔ+ΗΟ=α+ρ+(α+β-ρ)=2α+β=ΑΕ και ΗΕ+ΗΟ=β+ρ+(α+β-ρ)=α+2β=ΔΒ το Η θα είναι το σημείο τομής - το εντός της αρβήλου - της έλλειψης (Αδαμόπουλος Λεωνίδας κ.α. , 2022) με εστίες Δ και Ο και μεγάλο άξονα ΑΕ με την έλλειψη με εστίες Ε και Ο και μεγάλο άξονα ΔΒ.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 2^{η}.</u> **(** κύκλοι του Αρχιμήδη)

Έστω ευθεία ε⊥ΑΒ στο σημείο Γ. Εκατέρωθεν της ε γράφουμε δύο κύκλους εφαπτόμενους αυτής και των δύο ημικυκλίων. Τότε οι κύκλοι είναι ίσοι. (Σχήμα 5)

Έστω (Ζ, χ) ο κύκλος ο εφαπτόμενος της (ε) και των ημικυκλίων (Ο, α+β) και (Δ, α). Ισχύει ότι ΔΖ=α+χ, ΔΟ=β, ΟΖ=(α+β)-χ και ΟΖχ =ΟΒ-ΒΓ-ΓΖχ = (α+β)-2β-χ=α-β-χ.

Από Γ.Π.Θ (Αργυρόπουλος Ηλίας κ.α. , 2022-τεύχος Β) για αμβλεία γωνία στο $\overset{\Delta}{\Delta O Z}$ είναι: $\Delta Z^2 = \Delta O^2 + ZO^2 + 2\Delta O \cdot OZ_{\chi} \Leftrightarrow (\alpha+\chi)^2 = \beta^2 + (\alpha+\beta-\chi)^2 + 2\beta \cdot (\alpha-\beta-\chi)$
$\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots \Leftrightarrow \chi = \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha+\beta}$.

Όμοια αν (Θ,ψ) ο κύκλος που εφάπτεται στα ημικύκλια (Ο, α+β), (Ε, β) και στην ευθεία (ε), από Γ.Π.Θ για οξεία γωνία στο $\overset{\Delta}{O\Theta E}$, είναι: $\psi = \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha+\beta}$. Άρα οι κύκλοι (Ζ,χ) και (Θ,ψ) είναι ίσοι αφού χ=ψ (Γεώργιος Δ. Μιστριώτης , 2023).
Άρα η ακτίνα του κύκλου (Ζ,χ) είναι γνωστή και μπορεί να κατασκευαστεί.

<u>Γεωμετρική κατασκευή της ακτίνας χ των κύκλων</u> (Αρμονικός μέσος)

<u>$1^{ος}$ τρόπος.</u> (Σχήμα 6)

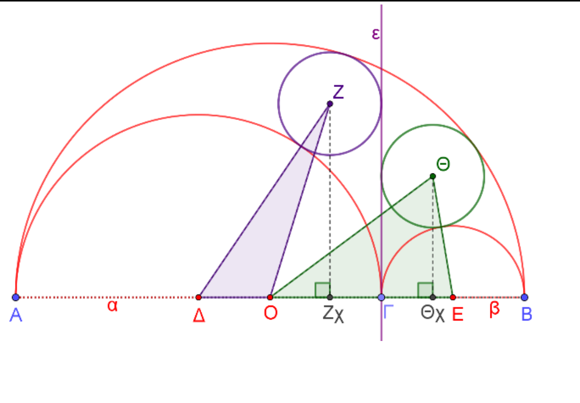
Κατασκευάζω τραπέζιο με βάσεις α, β, α//β. Από το σημείο τομής Τ των διαγωνίων του, φέρνω ε_1//α//β που τέμνει τις μη παράλληλες πλευρές του τραπεζίου στα σημεία Ω1, Ω2. Ισχύει ότι:. $\frac{T\Omega_2}{\beta} + \frac{T\Omega_2}{\alpha} = \frac{\lambda}{\kappa+\lambda} + \frac{\kappa}{\kappa+\lambda} = 1$, απ' όπου έχουμε: $T\Omega_2 = \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha+\beta}$. Ομοίως $T\Omega_1 = \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha+\beta}$.

$2^{ος}$ τρόπος.

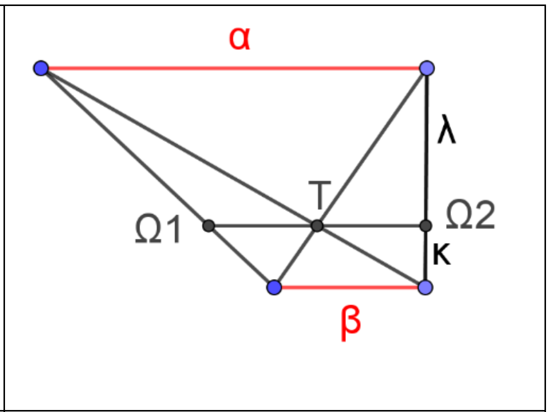
Κατασκευάζω την $4^η$ ανάλογο των τμημάτων α, β, κ=α+β.

$3^{ος}$ τρόπος. (Σχήμα 7)

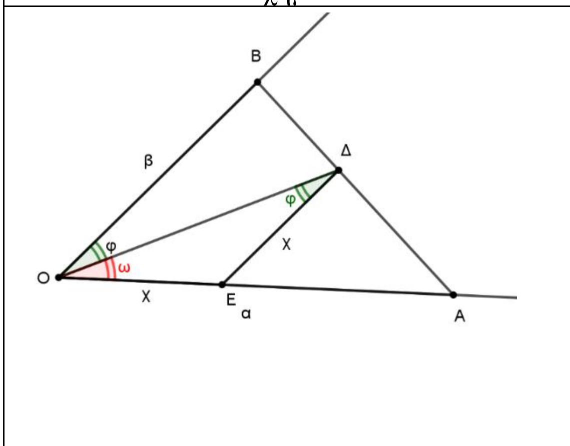
Θεωρούμε σημείο Ο και γωνία $\widehat{AOB}$, με ΟΑ=α, ΟΒ=β. Η διχοτόμος της$\widehat{AOB}$ τέμνει την ΑΒ στο Δ. Φέρνουμε την ΔΕ//ΟΒ. Είναι $\widehat{BO\Delta} = \widehat{AOB} = \widehat{O\Delta E}$και άρα το τρίγωνο ΟΔΕ είναι ισοσκελές με ΟΕ=ΔΕ=χ. Τότε, από το Θεώρημα Θαλή και από το Θεώρημα της Διχοτόμου (Αργυρόπουλος Ηλίας κ.α. , 2022-τεύχος Β) έχουμε ότι: $\frac{EA}{OE} = \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{OA}{OB}$, από όπου προκύπτει ότι $\frac{1}{\chi} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$.



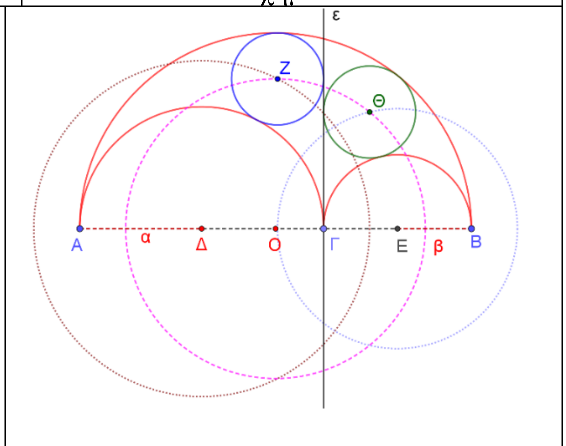
Σχήμα 5



Σχήμα 6



Σχήμα 7



Σχήμα 8

Εύρεση κέντρου των κύκλων

$1^{ος}$ τρόπος. (Σχήμα 8)

Γράφουμε κύκλους (Δ, α+χ) και (Ο, α+β-χ). Το σημείο τομής τους -εντός της αρβήλου- είναι το κέντρο του (Ζ,χ) δηλαδή το Ζ. Τέλος, στο Ζ φέρω τον κύκλο (Ζ,χ). Όμοια το σημείο τομής Θ των κύκλων (Ο, α+β-χ) και (Ε, β+χ) είναι το κέντρο κύκλου (Θ,ψ).

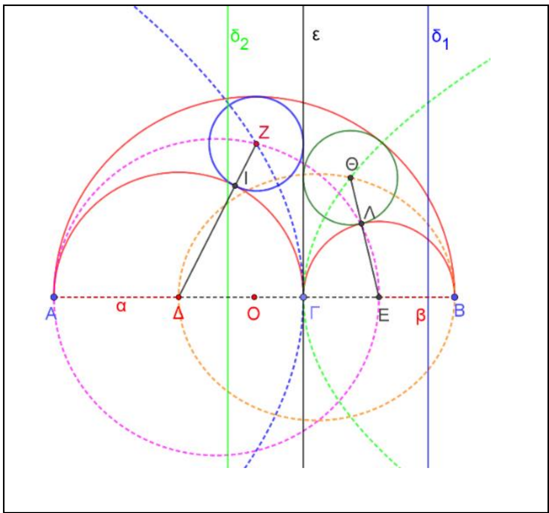
$2^{ος}$ τρόπος. (Σχήμα 9)

Αν δ_1//ε με d(ε, δ_1) =α, τότε d(Ζ,δ_1)=α+χ=(ΖΔ) και (ΖΔ)+(ΖΟ)=2α+β.Επομένως το Ζ προσδιορίζεται ως το σημείο τομής -το εντός της αρβήλου-μιας παραβολής (Αδαμόπουλος Λεωνίδας κ.α. , 2022) με εστία Δ και διευθετούσα δ_1 με την έλλειψη με εστίες Δ και Ο και μεγάλο άξονα ΑΕ. Όμοια το κέντρο Θ προσδιορίζεται ως το σημείο τομής -το εντός της αρβήλου – της παραβολής με εστία Ε και διευθετούσα δ_2//ε με d(δ_2, ε)=β και της έλλειψης με εστίες Ε και Ο και μεγάλο άξονα ΒΔ

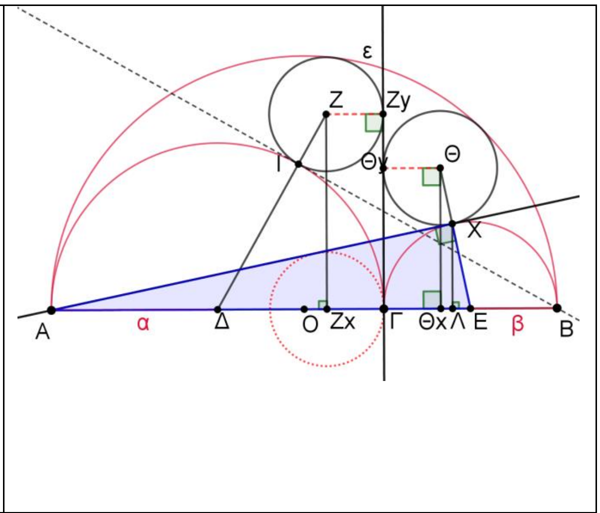
ΠΡΟΤΑΣΗ $3^η$

Η κοινή εφαπτομένη του κύκλου του Αρχιμήδη με κέντρο Θ και του ημικυκλίου με ακτίνα β στο σημείο επαφής τους Χ διέρχεται από το άκρο Α της αρβήλου. (Σχήμα 10)

Αρκεί να δείξω ότι το τρίγωνο ΑΧΕ είναι ορθογώνιο. Από πρόταση $2^η$ έχουμε ότι $\chi = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$. Είναι ΧΕ=β, ΑΕ=2α+β. Θεωρούμε το τμήμα ΧΛ ⊥ ΑΒ. Τα τρίγωνα ΧΛΕ και $\Theta\Theta_X E$ είναι όμοια, από όπου προκύπτει ότι $\Lambda E = \frac{\beta(\beta-\chi)}{\beta+\chi}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $XE^2 = \Lambda E \cdot AE$. Είναι ισοδύναμα: $\beta^2 = \frac{\beta(\beta-\chi)(2\alpha+\beta)}{\beta+\chi} \Leftrightarrow \beta^3 + \beta^2 x = 2\alpha\beta^2 + \beta^3 - 2\alpha\beta x - \beta^2 x \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \chi = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$, που ισχύει από πρόταση $2^η$. Επομένως το ΑΧΕ είναι ορθογώνιο και το ζητούμενο δείχθηκε.



Σχήμα 9



Σχήμα 10

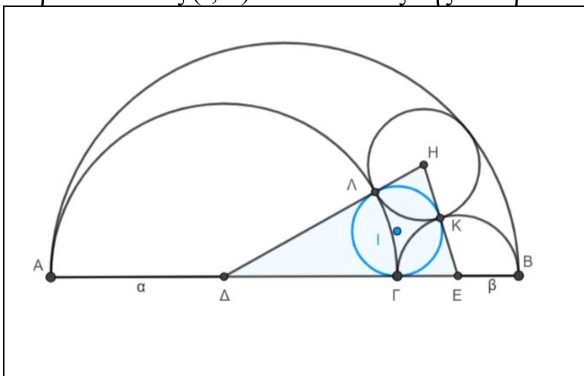
ΠΡΟΤΑΣΗ 4η

Ο κύκλος που διέρχεται από το Γ και τα σημεία επαφής Λ, Κ, των ημικυκλίων (Δ, α) , (Ε, β) με τον κύκλο της 1ης πρότασης είναι κύκλος του Αρχιμήδη. (Σχήμα 11)

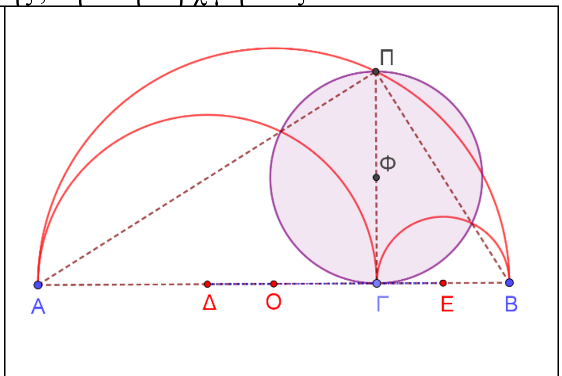
Έστω ο κύκλος (Ι, x) που δέρχεται από τα σημεία Λ,Κ,Γ. Από την ισότητα των τριγώνων ΗΛΙ-ΗΚΙ και ΛΙΔ-ΔΙΓ προκύπτει ότι ΗΙ και ΛΙ θα είναι διχοτόμοι. Επομένως το Ι είναι σημείο τομής των διχοτόμων. Άρα ο κύκλος (Ι, x) είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο ΔΗΕ. Αν τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου ΔΗΕ τότε: $\tau = \frac{\Delta\mathrm{E}+\Delta\mathrm{H}+\mathrm{EH}}{2}$= α+β+ρ, τ-ΔΗ=α+β+ρ-α-ρ=β, τ-ΕΗ=α, τ-ΔΕ=ρ. Για την εύρεση της ακτίνας x του εγγεγραμμένου κύκλου, χρησιμοποιούμε τους τύπους εμβαδού για το τρίγωνο ΔΗΕ: (ΔΗΕ)=τ·x. Επιπλέον, από τον τύπο του Ήρωνα (Αργυρόπουλος Ηλίας κ.α. , 2022-τεύχος Β) ισχύει: (ΔΗΕ)=$\sqrt{\tau(\tau-\Delta\mathrm{H})(\tau-\mathrm{EH})(\tau-\Delta\mathrm{E})}$.
Επομένως προκύπτει ότι: τx=$\sqrt{\tau(\tau-\Delta\mathrm{H})(\tau-\mathrm{EH})(\tau-\Delta\mathrm{E})} \Leftrightarrow$

$$x^2=\frac{(\tau-\Delta\mathrm{H})(\tau-\mathrm{EH})(\tau-\Delta\mathrm{E})}{\tau}\Leftrightarrow x^2=\frac{\alpha\beta\rho}{\alpha+\beta+\rho}\Leftrightarrow x^2=\frac{\alpha\beta\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}}{\alpha+\beta+\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}}\Leftrightarrow\ldots\ldots\Leftrightarrow x^2=\frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha+\beta)^2}\Leftrightarrow x=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

Άρα ο κύκλος (Ι, x) είναι κύκλος της 2ης πρότασης , δηλαδή Αρχιμήδειος.



Σχήμα 11



Σχήμα 12

ΠΡΟΤΑΣΗ 5η.

Αν η ευθεία ε⊥ΑΒ στο σημείο Γ, τέμνει το ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ στο σημείο Π, τότε εμβαδόν της αρβήλου είναι ίσο με το εμβαδόν κύκλου διαμέτρου ΓΠ (Σχήμα 12)

Το $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Pi}B}$ είναι ορθογώνιο επειδή η $\hat{\Pi}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Οπότε $\mathrm{A\Gamma}\cdot\Gamma\mathrm{B}=\Gamma\Pi^2$. Αν Ε το εμβαδόν Ε της αρβήλου και E_1 το εμβαδόν του κύκλου διαμέτρου ΓΠ (Αργυρόπουλος Ηλίας κ.α. , 2022-τεύχος Β) τότε:

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\mathrm{AB}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\Gamma\mathrm{B}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{\mathrm{A\Gamma}+\Gamma\mathrm{B}}{2}\right)^2-\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}\right)^2-\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{\Gamma\mathrm{B}}{2}\right)^2=\ldots\ldots$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\mathrm{A\Gamma}\cdot\Gamma\mathrm{B}=\frac{\pi}{4}\cdot\Gamma\Pi^2=\pi\cdot\left(\frac{\Gamma\Pi}{2}\right)^2=E_1.$$

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Ευάγγελος Σταμάτης (1970) Αρχιμήδους Άπαντα Αθήναι – έκδοσις Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδος

- Γεώργιος Δ. Μιστριώτης (2023) Άρβηλος Αρχιμήδη και Αρχιμήδειοι κύκλοι- αδημοσίευτη εργασία
- Αργυρόπουλος Ηλίας , Βλάμος Παναγιώτης , Κατσούλης Γεώργιος, Μαρκάτης Στυλιανός, Σίδερης Πολυχρόνης (2022) Εκλείδεια Γεωμετρία τεύχος Α- εκδόσεις ΙΤΥΕ- Διόφαντος
- Αργυρόπουλος Ηλίας , Βλάμος Παναγιώτης , Κατσούλης Γεώργιος, Μαρκάτης Στυλιανός, Σίδερης Πολυχρόνης (2022) Εκλείδεια Γεωμετρία τεύχος Β- εκδόσεις ΙΤΥΕ-Διόφαντος
- Αδαμόπουλος Λεωνίδας, Βισκαδουράκης Βασίλειος, Γαβαλάς Δημήτριος, Πολύζος Γεώργιος, Σβέρκος Ανδρέας (2022) ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - Β΄ ΤΑΞΗ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ, Ομάδα Προσανατολισμού, Θετικών Σπουδών - εκδόσεις ΙΤΥΕ- Διόφαντος